24.05.16

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$I \subseteq \mathbb{R}$, I διάστημα

δηλ. $\forall a,b \in I$, $a<b \Rightarrow [a,b] \subset I$

ΠΡΟΤΑΣΗ $A \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεκτικό $\Longrightarrow$ A διάστημα

Απόδειξη

Έστω $a, b \in A$

$a<b$. Θ.δ.ο. $[a,b] \subseteq A$ (1)

Ας υποθέσουμε ότι (1) δεν ισχύει. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνεκτικότητα

δηλ. $\exists\, c \in (a,b) : c \notin A$

Χρειαζόμαστε μια ανοικτή διαμέριση του A.

$G_1 = (-\infty, c) \cap A$
$G_2 = (c, +\infty) \cap A$ $\Big\} \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset$

G_1 ανοιχτό στο A (διότι $(-\infty, c)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$)
G_2 ανοιχτό στο A

Μας λείπει κάτι για να πετύχουμε ανοιχτή διαμέριση.
Θέλουμε: $\begin{cases} A = G_1 \cup G_2 \\ G_1 \neq \emptyset \\ G_2 \neq \emptyset \end{cases}$

$a \in G_1 \Rightarrow G_1 \neq \emptyset$
$b \in G_2 \Rightarrow G_2 \neq \emptyset$

$A = G_1 \cup G_2$ επειδή $c \notin A$

$\Rightarrow$ A όχι συνεκτικό ↯

Παρατήρηση: Σ' αυτή την πρόταση ισχύει και το αντίστροφο.
Δηλ. Αν I διάστημα του $(\mathbb{R}, |\,|)$
$\Rightarrow$ I συνεκτικό
(Η απόδειξη του αντίστροφου είναι εκτός ύλης)

Άσκηση: $(\mathbb{R}, |\,|)$
Ν.δ.ο. $S = \mathbb{Z}$ όχι συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R}$
Λύση
Θα φτιάξουμε μια διαμέριση (με τη βοήθεια της προηγούμενης απόδειξης)
$\mathbb{Z} = G_1 \cup G_2$

Παίρνουμε: $G_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ κλειστό στο $\mathbb{Z}$ αφού το $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ κλειστό στο $\mathbb{R}$
δηλ. περιέχει τα σσ. του

$G_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{Z}$ κλειστό στο $\mathbb{Z}$

$G_1 \cap G_2 = \emptyset$
$G_1 \neq \emptyset$
$G_2 \neq \emptyset$

Άρα, $\exists \{G_1, G_2\}$ κλειστή διαμέριση του $\mathbb{Z}$
$\Rightarrow \mathbb{Z}$ όχι συνεκτικό

Άσκηση: Ν.δ.ο. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ όχι συνεκτικό
Λύση
Επιλέγω ως $c = \sqrt{2}$ και κάνω την ίδια απόδειξη με πριν.

Άσκηση: $I \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$
I διάστημα (άρα συνεκτικό)
$G_f = \{(x,y) : x \in I, y = f(x)\} \subseteq I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$
Ν.δ.ο. $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι συνεκτικό.
Λύση
Ξέρουμε ότι συνεχής εικόνα συνεκτικού είναι συνεκτικό.

$g : I \to \mathbb{R}^2$
$g(x) = (x, f(x)) \subset \mathbb{R}$, $x \in I$, I συνεκτικό (επειδή είναι διάστημα)

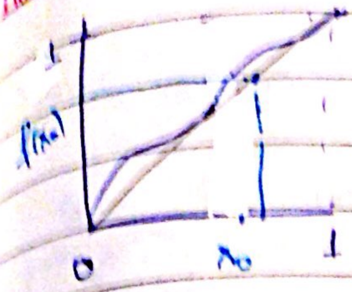
Η g είναι συνεχής λόγω της συνέχειας της f.

$g(I) = \{g(x) : x \in I\}$
$= \{(x, f(x)) : x \in I\}$
$= G_f$
I συνεκτικό
g συνεχής

$\Rightarrow g(I) = G_f$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R}^2$

Λήμμα: $f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής $\Rightarrow$ f έχει σταθερό σημείο
(δηλ. $\exists\, x_0 \in [0,1] : f(x_0) = x_0$)

Λύση



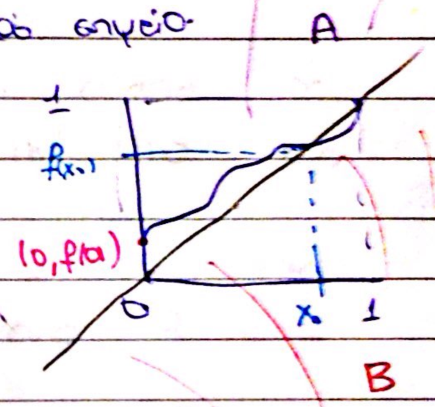
Ξεκινάει πάνω από τη διαγώνιο και καταλήγει κάτω από τη διαγώνιο

αφού συνεχής, το γράφημα της f θα είναι συνεκτικό

Συμφωνούμε ότι:

- $f(0) = 0 \to x_0 = 0$ σταθ
- $f(1) = 1 \to x_0 = 1$ σταθ
- αν δεν ισχύει τίποτα από αυτά, παρατηρούμε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$ (1)

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο.
Έστω ότι ισχύουν οι (1)



Τότε το $G_f \cap \Delta = \emptyset$ (Δ η διαγώνιος)

$\Delta = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$

$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$

Θεωρούμε $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\} \subseteq \mathbb{R}^2$

προφανώς δεν τέμνουν τη διαγώνιο

και $(0, f(0)) \in A$
$(1, f(1)) \in B$

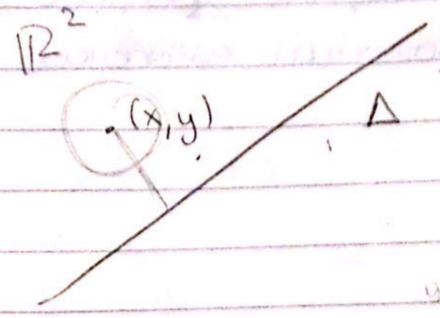
Άρα, $G_f \subseteq A \cup B \Rightarrow G_f = (G_f \cap A) \cup (G_f \cap B)$

Συνεπώς, $\{\underbrace{G_f \cap A}_{\neq \emptyset}, \underbrace{G_f \cap B}_{\neq \emptyset}\}$ διαμέριση του G_f

Αν δείξω ότι $G_f \cap A$ (όμοια $G_f \cap B$) ανοιχτό στο G_f
τότε: G_f όχι συνεκτικό (το οποίο θα είναι άτοπο)

$G_f \cap A \subseteq G_f$ ανοικτό στο G_f

(Αν δείξω ότι $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$,
τότε $G_f \cap A$ ανοικτό στο G_f)



γεωμετρικά, φαίνεται ότι είναι ανοικτό
(με μπάλα ή με το νδο το συμπλήρωμα κλειστό δηλ. με ακολουθίες)

αλλιώς, ένας άλλος τρόπος είναι να γράψουμε το Α ως $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x>0\}$
και να πάρουμε μια συνάρτηση

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$F_1(x,y) = y-x$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ ως πολυωνυμική
και άρα θα έχουμε

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; F_1(x,y) > 0\}$$

δηλ. $\quad = F_1^{-1}((0,+\infty))$

$\Longrightarrow$ A ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$

Είδαμε: $\left.\begin{array}{l} G_i \text{ συνεκτικό } \subseteq (E,\rho) \\ \bigcap_{i\in I} G_i \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow \bigcup G_i$ συνεκτικό

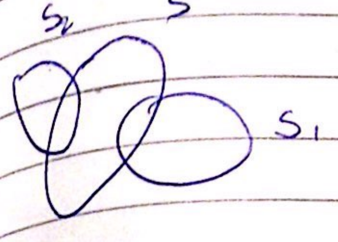
Άσκηση: $\left.\begin{array}{l} S_1, S_2 \text{ συνεκτικά} \\ S \text{ συνεκτικό} \\ S_1 \cap S \neq \varnothing \\ S_2 \cap S \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow S_1 \cup S_2 \cup S$ συνεκτικό

Λύση

S_1, S συν. $\Rightarrow$ $S_1 \cup S$ συνεκτικό

S_2, S συν $\Rightarrow$ $S_2 \cup S$ συνεκτικό

Είναι: $S_1 \cup S_2 \cup S = (S_1 \cup S) \cup (S_2 \cup S)$

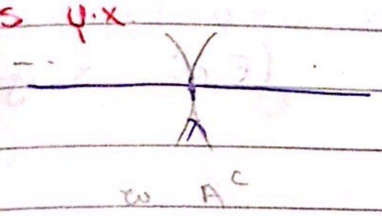


Εφόσον $(S_1 \cup S) \cap (S_2 \cup S) \supseteq S \neq \emptyset$

($S \neq \emptyset$ αφού τέμνει κάπου το S_1, δηλ. $S \cap S_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ στοιχείο του στο S_1)

$\Rightarrow$ $S_1 \cup S_2 \cup S$ συνεκτικό

Πάμε στους μ.χ.



$\{x\} = A$ όχι ανοιχτό

A^c είναι ανοιχτό

το A^c

$\Rightarrow \{x\}$ κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$

$y \neq x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_{\mathbb{R}}(y, \varepsilon) \cap \{x\} = \emptyset$

$B_{\mathbb{R}}(y, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x\} = A^c$

Αυτό γενικεύεται σε όλους τους μ.χ.

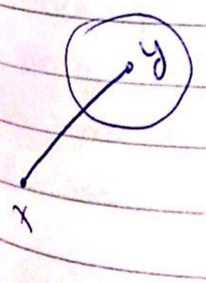
Δηλ. (βλέπε άσκηση), για τυχόν (E, ρ)

Άσκηση: (E, ρ) μ.χ. $x \in E$. Ν.δ.ο. $A = \{x\}$ κλειστό

Λύση

Θ.δ.ο. A^c ανοιχτό, $A^c = E \setminus \{x\}$ $\quad x \notin B_\rho(y, \varepsilon)$ $\Updownarrow$

Έστω $y \in A^c$. Θδο $\exists \varepsilon > 0$, $B_\rho(y, \varepsilon) \subseteq A^c \iff B_\rho(y, \varepsilon) \cap \{x\} = \emptyset$



$\delta = \rho(x, y) > 0$ Θέλω ένα ε, για μια μπαλίτσα που να μην πιάνει το x

$\{z \in E : \rho(z,y) < \delta\}$

$\delta = \rho(x,y)$

Επιλέγω $\varepsilon = \delta \Longrightarrow B_\rho(y,\varepsilon) = B_\rho(y,\delta)$

$(\forall y \neq x)$

και

$B_\rho(y,\delta) \not\ni x$

διότι: αν ανήκε τότε

$\rho(x,y) < \delta$

$\rho(x,y) = \delta$

Άρα $\{x\}^c$ ανοιχτό

$\Longrightarrow \{x\}$ κλειστό

Γενικά:

(E,ρ), x, y εν E

Αν $x \neq y \Longrightarrow \exists\, \delta_x > 0$

$\exists\, \delta_y > 0$

ώστε

$B_\rho(x,\delta_x) \cap B_\rho(y,\delta_y) = \emptyset$

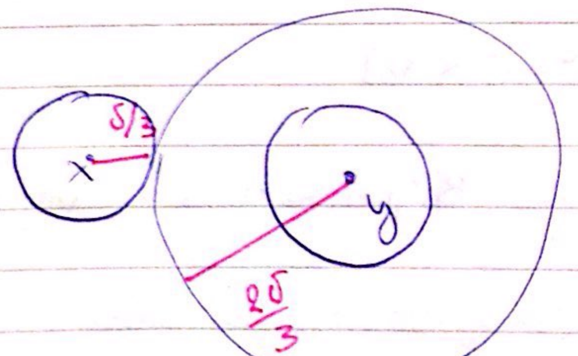
Απόδειξη

$x \neq y \Longrightarrow \delta = \rho(x,y) > 0$

Επιλέγουμε: $\delta_x = \dfrac{\delta}{3} > 0$

$\delta_y = \dfrac{2\delta}{3} > 0$ (το άθροισμά τους κάνει δ)

Τότε



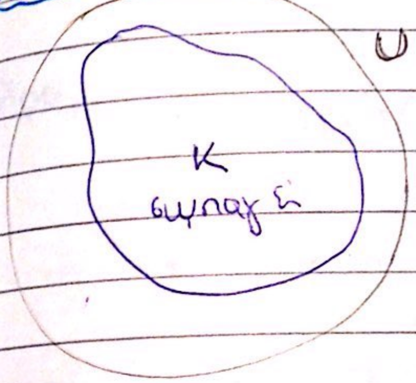
$\Longrightarrow \underbrace{B_\rho(x,\delta_x) \cap B_\rho(y,\delta_y)}_{= C} = \emptyset$

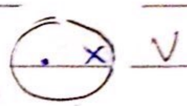
Αν $C \neq \emptyset$, $\exists z \in C$ $\begin{cases} \rho(z,x) < \delta_x = \dfrac{\delta}{3} \\ \rho(z,y) < \delta_y = \dfrac{2\delta}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\rho(x,y)}_{=\delta} \leq \rho(z,x) + \rho(z,y) < \dfrac{\delta}{3} + \dfrac{2\delta}{3} < \delta$

$\Rightarrow \delta < \delta$ ↯

Άσκηση: (E,ρ) μ.χ.





K συμπαγής, $x \notin K$

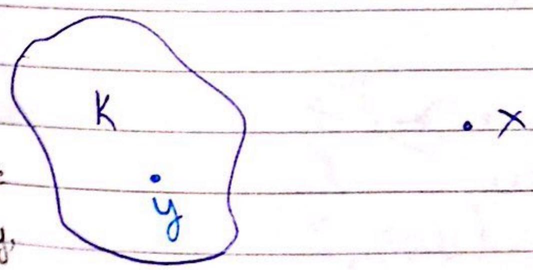
$\Rightarrow \exists\, U, V$ ανοικτά $\subseteq E$, $U \supseteq K$, $V \supseteq \{x\}$: $U \cap V = \emptyset$

E, $E \supseteq A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\}$

A συμπαγές ?

Αν πάρουμε από ένα ανοιχτό κάλυμμα, θα μαζέψουμε ως πολύ 100 (διότι πεπερ. υποκαλύμματα) $\Rightarrow$ A συμπαγές

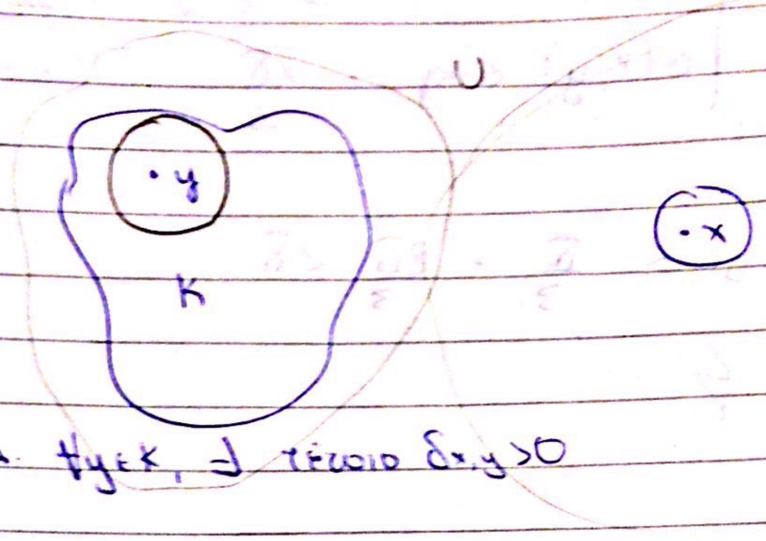
Λύση



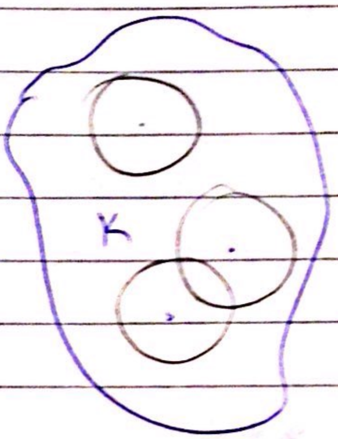
Παίρνουμε τυχαίο y, ότι μπορεί να έχει οποια θέση.

$y \in K \Rightarrow y \neq x$

$\Rightarrow \exists\, \delta_{x,y} : B(x, \delta_{x,y}) \cap B(y, \delta_{x,y}) = \emptyset$



δηλ. $\forall y \in K$, $\exists$ τέτοιο $\delta_{x,y} > 0$



$K \subseteq \bigcup_{y \in K} B(y, \delta_{x,y})$

δηλ. μαζεύουμε τις μπαλίτσες που προκύπτουν

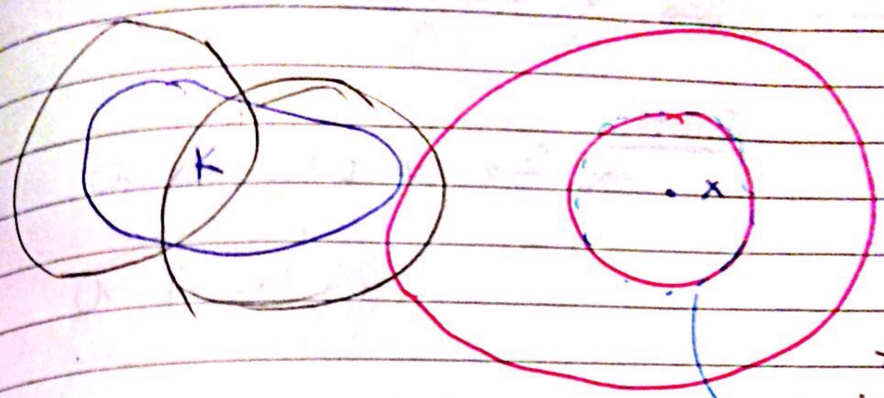
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $\exists\, y_1, \dots, y_n \in K$

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_{x,y_i})$

δηλ. καλύψαμε το K με πεπερασμένου πλήθους μπάλες

Για κάθε μια μπάλα του K, $\exists$ μπάλα

ώστε αυτές να μην τέμνονται



Ας δούμε για δύο μπάλες

η μεγάλη τέμνει τη μία, αλλά η μικρή δεν τέμνει καμία

δηλ. αυτό ως V

$K \subseteq U$, $V \supseteq \{x\}$

Επιλέγουμε ως $\delta = \min\{\delta_{x,y_i} : i=1,\dots,n\}$
$\vee$
0

Άρα, $\underbrace{B(x,\delta)}_{=V} \cap U = \emptyset$, $U = \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_{x,y_i})$

<u>Άσκηση:</u> Δίνεται $f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$ έτσι ώστε $\forall\, S \subseteq E_1$, S συμπ. και $f|_S$ συνεχής $\Big\} \Rightarrow f$ συνεχής στο E_1

<u>Λύση</u>

Έστω τυχαίο $x \in E_1$ και $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$

ΘΔΟ $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x)$

Έχουμε αποδείξει ότι: $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$
$\Rightarrow S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq E_1$
συμπαγές

Θεωρούμε $f|_S : S \to (E_2, \rho_2)$
$\downarrow$
$(S, (\rho_1)_S)$

Έχουμε: $x_n \xrightarrow{\rho_1} x \Longrightarrow \underset{\cap S}{x_n} \xrightarrow{(\rho_1)_S} \underset{\in S}{x}$

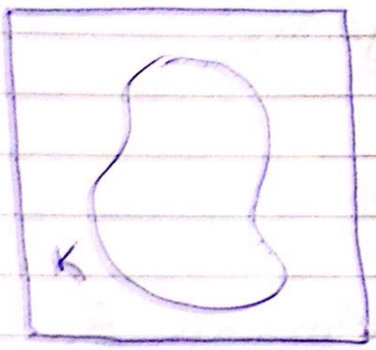
Διότι:

$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x \Rightarrow \rho_1(x_n, x) \to 0$$
$$\rho_1(x_n, x) = (\rho_1)_S(x_n, x) \to 0$$

$$\xRightarrow[\text{συνεχής}]{f|_S} f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x)$$

Άσκηση: K συμπαγές $\subseteq (E,\rho) \Rightarrow$ K φραγμένο
Ν' αποδειχθεί με καλύψεις

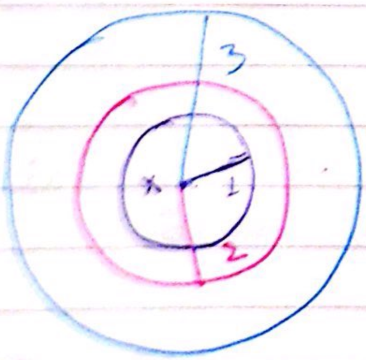
Λύση



K φραγμένο $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists M>0, \exists x \in E \\ K \subseteq B(x,M) \end{cases}$

Αρκεί να τ' αποδείξουμε
(δηλ. όλο το K περιέχεται
σε μια μπάλα)

Σταθεροποιούμε $x \in E$.



$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(x,n)$$

Διότι:
προφανώς $E \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(x,n)$

και ισχύει και $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(x,n)$ αφού, για τυχόν y, $y \in E$ έχουμε:
$y \in E \Rightarrow \rho(x,y) = N < +\infty$, $N \in \mathbb{R}$

Άρα (από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : N < n$

Άρα $\rho(x,y) = N < n \Rightarrow y \in B_\rho(x,n)$

Οι μπάλες $\{ B(x,n) : n = 1, 2, \ldots \}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του K (αφού και του E).

Επομένως, εφόσον K συμπαγές, θα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλ.

$$\exists n_1, n_2, \ldots, n_\ell : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} B(x, n_j)$$

$\Downarrow$

Εμείς θέλουμε μία ενιαία δηλ. να σταματούνε, δηλ. για το μεγαλύτερο n_j

Θέτουμε $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_\ell\} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} B(x, n_j) = B(x, n)$$

$\Rightarrow K$ φραγμένο

Scanned by CamScanner